Wichtige Rechenregeln

1.) Klausurvorbereitung

Alles auf einmal lernen zu müssen macht viel mehr Arbeit, als kontinuierlich zu lernen.

- $1 \cdot 14 \gg 14 \cdot 1$ (1)

2.) Binomische Formeln

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, k \in \mathbb{N}$.

Allgemein:

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ (2)

3 wichtige spezielle Formeln:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (3)
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (4)
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ (5)

3.) Quadratische Gleichungen

Seien $a, b, c, p, q, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Allgemeine Form:

- $ax^2 + bx + c = 0$ (6)

Normalform (Division der Allgemeinen Form mit a):

- $x^2 + px + q = 0$ (7)

Lösung der quadratischen Gleichung (p-q-Formel):

- $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (8)

4.) Potenzen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

Definitorisches:

- $a^n \equiv \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ (9)

Rechenregeln:

- $a^0 = 1$ (10)
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0$ (11)
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (12)
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad b \neq 0$ (13)
- $(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$ (14)
- $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$ (15)
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}, \qquad a \neq 0$ (16)

5.) Wurzeln

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \neq 0$.

Definitorisches:

- $x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$ (17)

Rechenregeln:

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (18)
- $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ (19)
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (20)
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (21)
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \cdot \sqrt[n \cdot m]{a}$ (22)
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$ (23)
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$ (24)

6.) Logarithmen

Seien $a, b, c, n, x \in \mathbb{R}^+$ und $n \neq 0$.

Definitorisches:

- $$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(b) \tag{25}$$
- $$\log_e(b) \equiv \ln(b), \qquad e = \text{ Eulersche Zahl} \tag{26}$$

Rechenregeln:

- $$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \tag{27}$$
- $$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c), \qquad b \neq 0 \tag{28}$$
- $$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b) \tag{29}$$
- $$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a x} \tag{30}$$
- $$\log_a(a) = 1 \tag{31}$$
- $$\log_a(1) = 0 \tag{32}$$
- $$\ln(e) = 1 \tag{33}$$

7.) Ableitungen

Seien $a, c, n, x \in \mathbb{R}$ und $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ reellwertige Funktionen.

Konstante Funktion:

- $$[c]' = 0 \tag{34}$$

Potenzregel:

- $$[x^n]' = n \cdot x^{n-1} \tag{35}$$

Faktorregel:

- $$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \tag{36}$$

Summen-/Differenzenregel:

- $$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \tag{37}$$

Produktregel:

- $$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{38}$$

Quotientenregel:

- $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{39}$$

Kettenregel:

- $$\Big[f\Big(g(x)\Big)\Big]' = f'\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x) \tag{40}$$

Exponentialfunktion:

- $[e^x]' = e^x$ (41)

- $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ (42)

Logarithmusfunktion:

- $[\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot ln(a)}$ (43)

- $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$ (44)

- $\Big[\ln\Big(f(x)\Big)\Big]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (45)

Potenzfunktion:

- $[a^x]' = \ln(a) \cdot a^x$ (46)

- $\Big[f(x) = g(x)^{h(x)}\Big]' = \Big[h'(x) \cdot \ln\Big(g(x)\Big) + h(x) \cdot \dfrac{g'(x)}{g(x)}\Big] \cdot g(x)^{h(x)},$ (47)

  da $f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$

8.) Integrale

Seien $a, b, c, C, n, x \in \mathbb{R}$ und $f(\cdot), F(\cdot), g(\cdot)$ reellwertige Funktionen.

Definition Stammfunktion F(x):

- $F'(x) \equiv f(x)$ (48)

Unbestimmtes Integral:

- $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ (49)

Hauptsatz der Integralrechnung:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$ (50)

Nützliche Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen:

- $\displaystyle\int_a^b x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (51)

- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$ (52)

- $\displaystyle\int_a^b e^x \mathrm{d}x = e^x + C$ (53)

Nützliche Integrationsregeln:

- $$\int_a^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{54}$$

- $$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{55}$$

- $$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \tag{56}$$