Mathematische Methoden der VWL

Kapitel 3: Komparative Statik

Till Stowasser

LMU, Sommersemester 2018

Intuition: "Grafik" des Kapitels (I)

Kapitel 1 + 2

Exogener Parameter: α

"Ökonom. Modell": $f(x, \alpha) = 0$

$x^*(\alpha)$

Kapitel 3

Syllabus

3.1 Einführung

Ökonomen interessieren sich häufig dafür, welche Auswirkungen die **Veränderung eines exogenen Parameters** auf eine gegebene Situation hat:

- Auswirkung einer Erhöhung der Mehrwertsteuer auf den Gleichgewichtspreis auf einem Markt.
- Auswirkung einer Preiserhöhung eines Inputgutes (z.B. Rohöl) auf den Einsatz anderer Inputgüter (Arbeit, Kapital).
- Auswirkung einer Veränderung der Geldmenge auf Zinsniveau und Beschäftigung.
- Auswirkung einer Einkommenserhöhung auf den Nutzen eines Konsumenten
- Auswirkung einer Inputpreiserhöhung auf die Kosten eines Unternehmens

In diesem Kapitel lernen wir **4 allgemeine Methoden** kennen, mit denen man solche **komparativ-statischen Analysen** durchführen kann.

Welche Methode wann zur Anwendung kommt, hängt davon ab welche Fragestellung man analysiert:

Welchen Einfluss hat die Veränderung eines exogenen Parameters ...

- ... auf eine **endogene Variable** → **Implicit-Function-Theorem (IFT)**
  - Modell mit einer endogenen Variable → IFT bei einer endogenen Variable (Kapitel 3.2.2)
  - Modell mit mehreren endogene Variablen → IFT bei n endogenen Variablen (Kapitel 3.2.3)
- ... auf den **Wert der Zielfunktion** → **Envelope-Theorem (ET)**
  - Optimierung ohne Nebenbedingungen → ET ohne NB (Kapitel 3.3.1)
  - Optimierung mit Nebenbedingungen → ET mit NB (Kapitel 3.3.3)

3.2 Das Implicit-Function-Theorem

Das Implicit-Function-Theorem (IFT) kommt zum Einsatz, wenn man wissen möchte welchen Einfluss die Veränderung eines exogenen Parameters auf eine **endogene Variable** hat.

Endogene Variablen sind die Lösungen des Modells, also quasi das "was man ausrechnen" kann.

- Optimale Outputmengen, x_i^*, beim Gewinn-Maximierungsproblem
- Optimale Konsummengen, x_i^*, beim Nutzen-Maximierungsproblem
- Gleichgewichtspreis, p_i^*, beim Markgleichgewichts-Modell
- u.v.m.

3.2.1 Motivationsbeispiele

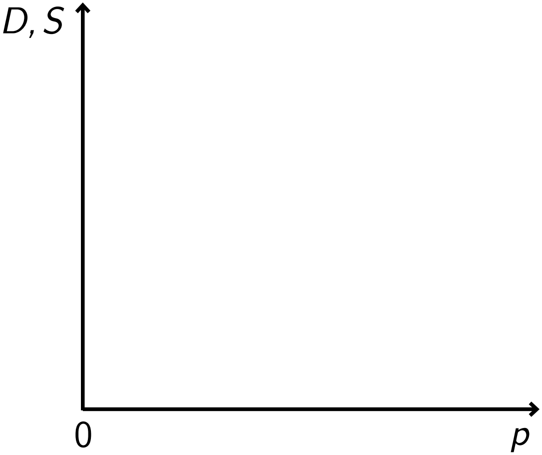
Beispiel 1: Marktgleichgewicht

- Betrachten Sie ein einfaches Marktmodell mit linearen Nachfrage- und Angebotskurven:

$$D(p, y) = a - bp + cy \;, \quad a, b, c > 0$$
$$S(p) = \alpha + \beta p \;, \quad \alpha, \beta > 0$$

- Dabei ist p der Marktpreis und y das Einkommen der Konsumenten.
- Nehmen sie nun an, wir wollten herausfinden, wie sich der Gleichgewichtspreis, p^* verändert, wenn y steigt.
- **Gesucht ist also** $\frac{\partial p^*}{\partial y}$. Dabei ist p^* die endogene Variable und y der exogene Parameter.

Graphische Lösung



Formale Lösung

1. **Berechnen des Gleichgewichts:**
   - GG-Bedingung: Nachfrage = Angebot:

     $$D(p^*, y) \;=\; a - bp^* + cy \;=\; \alpha + \beta p^* \;=\; S(p^*)$$

   - Auflösen nach p^* :

     $$p^* \;=\; \frac{a - \alpha + cy}{b + \beta}$$

   - Einsetzen in $S(p^*)$:

     $$x^* \;=\; \alpha + \beta \frac{a - \alpha + cy}{b + \beta}$$

2 **Ableiten des Gleichgewichtspreises** nach y:

- Der Gleichgewichtspreis ist eine explizite Funktion von y:

$$p^*(y) \;=\; \frac{a-\alpha}{b+\beta} + \frac{c}{b+\beta} y$$

- Ableiten nach y ergibt:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} \;=\; \frac{c}{b+\beta} > 0$$

Beispiel 2: Monopolproblem des Lehrbuchverlages

- Betrachten Sie erneut das Beispiel aus Kapitel 1.2, bei dem der Verlag dem Autor einen Tantiemensatz $t < 1$ als Anteil am Erlös zahlen muss.
- Gefragt ist nun, **wie sich die optimale Menge des Verlages verändert,** wenn sich t verändert: $\frac{\partial x^*}{\partial t} =?$
- Maximierungsproblem des Verlages:

$$\max_x \ \Pi_V = (1-t)(a-bx)x - cx$$

Formale Lösung

1. Aufstellen der **Bedingung erster Ordnung:**

$$\frac{\partial \Pi_V}{\partial x} = (1-t)\cdot[-bx + a - bx] - c = 0$$

2. **Ausrechnen der optimalen Menge** x^*:

$$x^* = \frac{a - \frac{c}{1-t}}{2b}$$

Die Gewinnfunktion ist global konkav, also ist x^* ein Maximum.

3. **Ableiten** von x^* nach t: Die optimale Menge des Monopolisten ist eine explizite Funktion von t. Ableiten nach t ergibt:

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = -\frac{c}{2b(1-t)^2} < 0$$

3.2.2 Das IFT bei 1 endogenen Variable

In den beiden Beispielen haben wir den Gleichgewichtspreis und den optimalen Produktionsplan **explizit ausgerechnet,** um komparative Statik zu betreiben. In diesen Beispielen war das ganz einfach.

Im Allgemeinen ist dieses Verfahren jedoch **nicht zu empfehlen:**

- Oftmals sind die funktionalen Form nicht bekannt, so dass man die endogenen Variablen gar nicht explizit ausrechnen kann.
- Selbst wenn die Funktionen bekannt sind, sind sie häufig so kompliziert, dass es sehr aufwendig wäre, eine Lösung explizit auszurechnen.

Darum ist es nützlich, das Problem im Folgenden **allgemein zu betrachten.**

Notation

- Die **endogene Variable** sei mit x bezeichnet.
  - Die endogene Variable ist die abhängige Variable eines Modells.
  - Oft handelt es sich um die Lösung eines Problems (z.B. optimaler Komsumplan, optimaler Produktionsplan), also die Größe, die man "ausrechnen kann".
  - Manchmal ist es auch vom Kontext/von der Fragestellung abhängig, welche Variable endogen ist. (z.B. GG-Preis in Abhängigkeit einer Mengenänderung vs. GG-Menge in Abhängigkeit einer Preisänderung)
- Der **exogene Parameter** sei mit α bezeichnet.
  - Der exogene Parameter ist die Größe im Modell, die (von außen) variiert wird und deren Einfluss auf die endogene Variable wir untersuchen wollen.
  - Parameter sind in der Regel die Größen, die vorgegeben werden und das Setup des Modells beschreiben (z.B. Grenzkosten, Güterpreise, Einkommen), also nicht die Größen, die "man ausrechnet".

- Die **Lösungsbedingung** des ökonomisches Modells sei durch die Gleichung der Form $f(x, \alpha) = 0$ beschrieben.
  - Die Lösungsbedingung enthält alle notwendigen Informationen zur Berechnung der Lösung des ökonomischen Problems.
  - Sie hängt von x und α ab und muss derart formuliert sein, dass auf der rechten Seite eine Null steht (Nullform).
  - Marktmodell aus Beispiel 1: $f(x, \alpha) = D(p, y) - S(p) = 0$
    - Die endogene Variable, x, ist in diesem Fall p^*.
    - Der exogene Parameter, α, ist in diesem Fall y.
    - Ebenfalls möglich: $f(x, \alpha) = S(p) - D(p, y) = 0$
  - Monopolmodell aus Beispiel 2: $f(x, \alpha) = \frac{\partial \Pi_V}{\partial x} = 0$
    - Die Lösungsbedingung ist also die Bedingung erster Ordnung.
    - Die endogene Variable, x, ist in diesem Fall x^*.
    - Der exogene Parameter, α, ist in diesem Fall t.
    - Welche weiteren exogenen Parameter gibt es in diesem Modell?

Implicit-Function-Theorem bei einer endogenen Variable

- Um zu bestimmen, wie sich die endogene Variable x verändert, wenn sich der exogene Parameter α verändert, kann man folgendes Theorem benutzen:

Theorem (3.1 – IFT bei 1 endogenen Variable)

Gegeben sei

$$f(x,\alpha) = 0.$$

Dabei sei $f(x,\alpha)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ an der Stelle (x,α). Dann gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}}$$

Beweis

- Nehmen wir an, dass x eine differenzierbare Funktion $x(\alpha)$ von α ist. Das bedeutet, dass, wenn sich der Parameter α verändert, sich auch die endogene Variable x verändern wird.
- Wir können die Lösungsbedingung also schreiben als:

$$f(x(\alpha), \alpha) \; = \; 0$$

- Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung nach α **differenzieren (Kettenregel beachten),** erhalten wir:

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \; = \; 0$$

- Wenn $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, dann können wir nach $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ auflösen und erhalten

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \; = \; -\frac{\partial f(x, \alpha)/\partial \alpha}{\partial f(x, \alpha)/\partial x}.$$

- q.e.d.

Hausaufgabe

- Benutzen Sie Theorem 3.1 um in den beiden obigen Motivationsbeispielen $\frac{\partial p^*}{\partial y}$ und $\frac{\partial x^*}{\partial t}$ direkt auszurechnen.
- In Beispiel 2 sollten Sie auf $\frac{\partial x^*}{\partial t} = -\frac{a-2bx^*}{(1-t)2b}$ kommen. Warum ist das dasselbe wie $\frac{\partial x^*}{\partial t} = -\frac{c}{2b(1-t)^2}$?

Hausaufgabe: Berechnung von $\frac{\partial p^*}{\partial y}$

Hausaufgabe: Berechnung von $\frac{\partial x^*}{\partial t}$

Anwendung auf implizite Funktionen

- Wie erwähnt, kann das IFT weitaus mehr als die Ergebnisse aus Ableitungen expliziter Funktionen zu bestätigen.
- Die **wahre Stärke des IFT** liegt darin, Aussagen über die Veränderung einer endogenen Variable, x, treffen zu können, obwohl unbekannt ist, wie x überhaupt aussieht.
- Etwas formaler formuliert: Das IFT ist auch dann anwendbar, wenn wir nicht die expliziten sondern **nur die impliziten Funktionsverläufe** eines ökonomischen Modells kennen (z.B. dass die Nachfrage nach einem Gut mit steigendem Preis sinkt).
- Um dies zu sehen, lösen wir die ökonomischen Modelle der beiden Motivationsbeispiele erneut, jedoch dieses Mal in allgemeiner Form mit Hilfe von Theorem 3.1.

Beispiel 1: Marktgleichgewicht...revisited

- Betrachten Sie ein Marktmodell mit allgemeinen Nachfrage- und Angebotskurven.
- Die **Lösungsbedingung** lautet nach wie vor:

$$f(x,\alpha) = D(p,y) - S(p) \;=\; 0$$

- Allerdings seien uns die genauen **Funktionsverläufe** von $D(p,y)$ und $S(p)$ nun **nicht bekannt.**
- Wir wissen lediglich, dass $D_y > 0$, $D_p < 0$ und $S_p > 0$, was durchaus übliche (und somit "harmlose") Annahmen über Nachfrage- und Angebotsfunktionen darstellen. (Ausnahme?)
- **Theorem 3.1** impliziert:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} \;=\; -\frac{D_y}{D_p - S_p}$$

- Das **Vorzeichen** dieses Bruchs ist schnell zu bestimmen und ist (wie im Fall der expliziten Funktionen) positiv: $\frac{\partial p^*}{\partial y} > 0$.

Beispiel 2: Monopolproblem des Lehrbuchverlages...revisited

- Betrachten Sie folgendes allgemeine Maximierungsproblem des Verlages:

$$\max_{x} \ \Pi_V = (1-t)P(x)x - C(x)$$

- Das einzige was wir über die **Funktionsverläufe** wissen, ist dass $P'(x) < 0$ und dass $C'(x) > 0$, was erneut sehr realistische Annahmen darstellen.
- Die **Lösungsbedingung** ist nach wie vor die Bedingung erster Ordnung für das Gewinnmaximierungsproblem des Monopolisten:

$$f(x,\alpha) = \frac{\partial \Pi_V}{\partial x} = (1-t)[P'(x)x + P(x)] - C'(x) \ = \ 0$$

- **Theorem 3.1** impliziert:

$$\frac{\partial x}{\partial t} \ = \ -\frac{-[P'(x)x + P(x)]}{(1-t)[P''(x)x + 2P'(x)] - C''(x)}$$

- Was können wir über das **Vorzeichen** dieses Ausdrucks sagen?
- Beginnen wir mit dem **Zähler:**
  - Auf den ersten Blick erscheint das Vorzeichen des Zählers unbestimmt.
  - Allerdings hilft ein Blick auf die **BEO** weiter. Es gilt:

$$(1-t)[P'(x)x + P(x)] \;=\; C'(x)\;.$$

  - Das impliziert

$$-[P'(x)x + P(x)] \;=\; -\frac{C'(x)}{1-t} \;<\; 0$$

  - Also ist der Zähler negativ.

- Widmen wir uns nun dem **Nenner:**
  - Um das Vorzeichen des Nenners zu bestimmen, betrachten wir die **BZO:**

$$\frac{\partial^2 \Pi_V}{\partial x^2} \;=\; (1-t)[P''(x)x + 2P'(x)] - C''(x) \;<\; 0$$

  - Dieser Ausdruck entsprecht exakt dem obigen Nenner.
  - Also ist der Nenner ebenfalls negativ.
- Da Zähler und Nenner negativ sind, ist der Gesamtausdruck...
- ...ebenfalls negativ (!?!)
- **Achtung: Vergessen Sie nie das negative Vorzeichen** vor dem Bruch, das Bestandteil des IFT ist!
- $\frac{\partial x}{\partial t} \;=\; -\frac{-[P'(x)x+P(x)]}{(1-t)[P''(x)x+2P'(x)]-C''(x)} < 0$
- Auch dieses Resultat ist im Einklang zum Ergebnis, das wir mit expliziten Funktionsverläufen erzielt haben.

Abschließende Bemerkungen zum IFT bei 1 endogenen Variable

1. Das IFT ist **sehr allgemein anwendbar.**
   - Im ersten Beispiel ist die Funktion $f(x, \alpha)$ eine Gleichgewichtsbedingung.
   - Im zweiten Fall ist sie eine Bedingung erster Ordnung aus einem Maximierungsproblem.
   - Obwohl das sehr unterschiedliche Probleme sind, ist das Verfahren in beiden Fällen dasselbe.
2. Wenn wir komparative Statik zu einem **Optimierungsproblem** betreiben, müssen wir uns keine großen Gedanken über die Identität der **Lösungsbedingung**, $f(x, \alpha) = 0$, machen, da es sich **immer** um **die Bedingung erster Ordnung** handelt.
   - Das ergibt Sinn, denn die BEO formuliert ja die notwendige Bedingung für das Optimum (die Lösung)
   - Zudem ist die BEO immer bereits in der Nullform: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

3. Wenn wir komparative Statik zu einem **Optimierungsproblem** betreiben, müssen wir uns keine großen Gedanken über das Vorzeichen des Nenners machen, da es sich beim **Nenner immer** um **die Bedingung zweiter Ordnung** handelt.
    - Bei einem Maximierungsproblem ist der Nenner stets negativ.
    - Bei einem Minimierungsproblem ist der Zähler stets positiv.

3.2.3 Das IFT bei n endogenen Variablen

Das IFT bei einer endogenen Variable ist nur anwendbar, wenn das Modell auch nur eine relevante endogene Variable besitzt.

Wir betrachten jetzt den **allgemeineren Fall,** bei dem die Lösung unseres ökonomischen Problems durch n Gleichungen in Nullform beschrieben wird, die von **n endogenen Variablen** und **m exogenen Parametern** abhängen.

Das zu lösende Gleichungssystem hat also folgende Form:

$$\begin{array}{rcl} f^1(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \\ f^2(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^n(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \end{array}$$

Beispiele

1. Ein **Allgemeines Gleichgewichtsmodell mit n + 1 Märkten,**
   - das durch n GG-Bedingungen beschrieben wird (warum nur n?),
   - mit n endogenen Variablen (z.B. Preisen) und verschiedenen exogenen Parametern (z.B. verschiedenen Steuersätzen).
   - Die Frage könnte lauten, wie sich die GG-Allokation verändert, wenn sich ein Parameter (z.B. eine Steuer auf Konsumgüter) ändert.
2. Ein **Maximierungsproblem mit k Kontrollvariablen und l Nebenbedingungen in Gleichheitsform.**
   - Hier gibt uns der Lagrange-Ansatz $n = k + l$ Bedingungen erster Ordnung (die Ableitungen nach den Kontrollvariablen und nach den Lagrange-Parametern).
   - Diese können wiederum von bestimmten exogenen Parametern abhängen.

Implicit-Function-Theorem bei n endogenen Variablen

- Um zu bestimmen, wie sich die endogene Variable x_i verändert, wenn sich der exogene Parameter α_j verändert, kann man folgendes Theorem benutzen:

Theorem (3.2 – IFT bei n endogenen Variablen)

Wenn das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} f^1(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \\ f^2(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^n(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \end{array}$$

eine Lösung $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$ hat, so dass die $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$ differenzierbare Funktionen der exogenen Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sind, dann gilt:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|}$$

Theorem (3.2 – IFT bei n endogenen Variablen (Fortsetzung))

für $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$ *wobei* $|F| \neq 0$ *und*

$$|F| = \begin{vmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} & \cdots & f^1_{x_n} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2} & \cdots & f^2_{x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^n_{x_1} & f^n_{x_2} & \cdots & f^n_{x_n} \end{vmatrix}.$$

$|F_{ij}|$ *wird gebildet, in dem die* i*te Spalte in* $|F|$ *ersetzt wird durch die* j*te Spalte der* $n \times m$ *Matrix* M*:*

$$M = \begin{pmatrix} -f^1_{\alpha_1} & -f^1_{\alpha_2} & \cdots & -f^1_{\alpha_m} \\ -f^2_{\alpha_1} & -f^2_{\alpha_2} & \cdots & -f^2_{\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -f^n_{\alpha_1} & -f^n_{\alpha_2} & \cdots & -f^n_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

Beweis für 2 endog. Variable und 2 exog. Parameter (oBdA)

- Betrachten Sie ein Gleichungssystem mit zwei endogenen Variablen und zwei exogenen Parametern:

$$\begin{aligned} f^1(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \\ f^2(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

- Wir nehmen an, dass eine Lösung $(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2))$ existiert, so dass die $x_i^*(\alpha_1, \alpha_2)$ differenzierbare Funktionen von (α_1, α_2) sind. Also gilt:

$$\begin{aligned} f^1(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \\ f^2(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

- Wir **differenzieren beide Gleichungen** nach α_1 und erhalten **(Kettenregel beachten)**:

$$\begin{aligned} f^1_{x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f^1_{x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + f^1_{\alpha_1} &= 0 \\ f^2_{x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f^2_{x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + f^2_{\alpha_1} &= 0 \end{aligned}$$

- Dieses lineare Gleichungssystem können wir in Matrizenform schreiben:

$$\begin{pmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x_1^*/\partial \alpha_1 \\ \partial x_2^*/\partial \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f^1_{\alpha_1} \\ -f^2_{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

- Dieses Gleichungssystem hat nur dann eine Lösung, wenn

$$|F| = \begin{vmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2} \end{vmatrix} = f^1_{x_1} f^2_{x_2} - f^2_{x_1} f^1_{x_2} \neq 0$$

- Jetzt können wir die **Cramer'sche Regel** anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} &= |F_{11}|/|F| = \begin{vmatrix} -f^1_{\alpha_1} & f^1_{x_2} \\ -f^2_{\alpha_1} & f^2_{x_2} \end{vmatrix} /|F| = \frac{-f^1_{\alpha_1} f^2_{x_2} + f^2_{\alpha_1} f^1_{x_2}}{|F|} \\
\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} &= |F_{21}|/|F| = \begin{vmatrix} f^1_{x_1} & -f^1_{\alpha_1} \\ f^2_{x_1} & -f^2_{\alpha_1} \end{vmatrix} /|F| = \frac{-f^1_{x_1} f^2_{\alpha_1} + f^2_{x_1} f^1_{\alpha_1}}{|F|}
\end{aligned}$$

- **Zur Erinnerung: Cramer'sche Regel**
  - Betrachten Sie ein lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Die Lösung für x_i ist gegeben durch

  $$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|} \ ,$$

  wobei $\mathbf{A}_i$ die Matrix $\mathbf{A}$ ist, in der die $i$te Spalte durch den Vektor $\mathbf{b}$ ersetzt wurde.

- q.e.d.

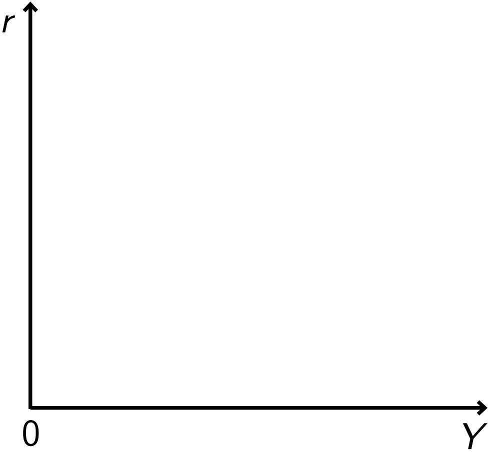
- **Anmerkung:** Die Beweisführung für eine Veränderung von α_2 ist analog. Gleiches gilt für den allgemeinen Fall mit n endogenen Variablen und m exogenen Parametern.

3.2.4 Beispiel 1: Ein einfaches IS-LM-Modell

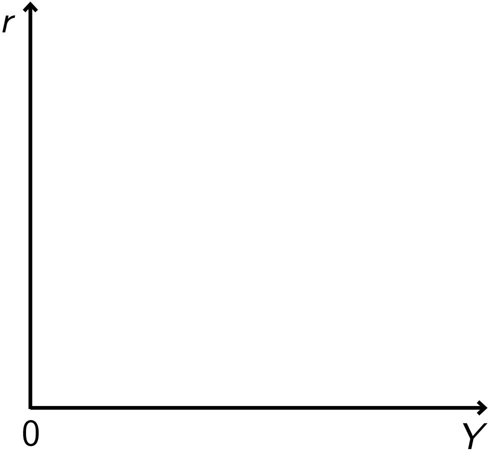
Modell-Setup

- Das IS-LM-Modell beschreibt eine Volkswirtschaft deren interdependenter Gütermarkt und Geldmarkt **gleichzeitig im Gleichgewicht** sind.
- **GG-Bedingung für den Gütermarkt:** In einer geschlossenen Volkswirtschaft müssen die Investitionen, I, gleich den Ersparnissen, S, sein: **I=S**
  - $I = I(r)$: Die Investitionen hängen ab vom Zins (mit $I_r < 0$).
  - $S = S(Y, r)$: Die Ersparnisse hängen ab vom Volkseinkommen, Y, und vom Zins, r (mit $S_Y > 0, S_r > 0$).
- **GG-Bedingung für den Geldmarkt:** Die Geldnachfrage, L, muss gleich dem Geldangebot, M, sein: **L=M**
  - $L = L(Y, r)$: Die Geldnachfrage hängt vom Volkseinkommen und vom Zins ab (mit $L_Y > 0$, $L_r < 0$).
  - M: Das Geldangebot ist ein exogener Parameter, der von der Zentralbank gesetzt wird.

Die IS-Kurve



Die LM-Kurve



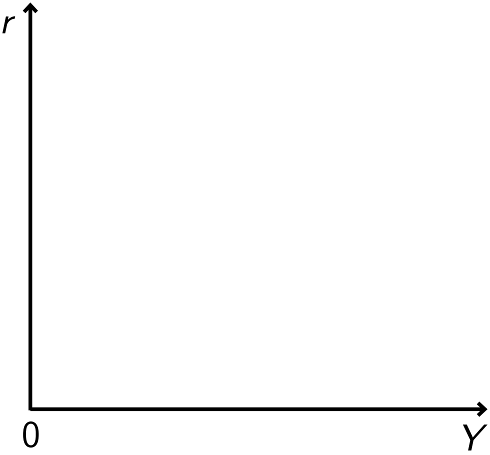
Allgemeines Gleichgewicht

- Im allgemeinen GG müssen **beide Märkte im GG** sein:

$$\begin{aligned} S(Y,r) - I(r) &= 0 \\ M - L(Y,r) &= 0 \end{aligned}$$

- Das allgemeine GG wird also beschrieben durch zwei Gleichungen mit zwei endogenen Variablen (Y, r) und einem exogenen Parameter (M).

Das Allgemeine Gleichgewicht graphisch



Komparative Statik

- **Gefragt ist:** Wie verändern sich Volkseinkommen und Zins, wenn sich die Geldmenge verändert? $\frac{\partial Y^*}{\partial M} =?$ und $\frac{\partial r^*}{\partial M} =?$
- Berechnen wir zunächst die **Determinante von F:**

$$|F| = \begin{vmatrix} S_Y & S_r - I_r \\ -L_Y & -L_r \end{vmatrix} = -S_Y L_r + L_Y(S_r - I_r) > 0.$$

- **Die Matrix M** ist in unserem Fall (da wir nur einen exogenen Parameter haben) ein Spaltenvektor:

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Sei $x_1^* \equiv Y^*$, $x_2^* \equiv r^*$ und $\alpha_1 \equiv M$, ergeben sich **folgende $|\mathbf{F_{ij}}|$:**

$$|F_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & S_r - I_r \\ -1 & -L_r \end{vmatrix}, \qquad |F_{21}| = \begin{vmatrix} S_Y & 0 \\ -L_Y & -1 \end{vmatrix}$$

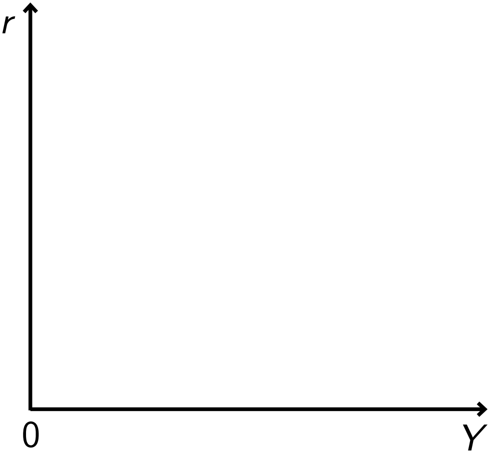
- Nun muss man alles nur noch **in Theorem 3.2 einsetzen:**

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & S_r - I_r \\ -1 & -L_r \end{vmatrix}}{|F|} = \frac{0 + (S_r - I_r)}{|F|} > 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} S_Y & 0 \\ -L_Y & -1 \end{vmatrix}}{|F|} = \frac{-S_Y + 0}{|F|} < 0$$

- Wir sehen also, dass eine Erhöhung der Geldmenge im IS-LM-Modell das Volkseinkommen erhöht und den Zins senkt.
- Beachten Sie, dass wir für dieses Resultat **keine Annahmen an die exakte funktionale Form** der verschiedenen Funktionen machen mussten. Wir haben lediglich Annahmen an die Vorzeichen der ersten Ableitungen dieser Funktionen gemacht.

Komparative Statik graphisch



3.2.5 Beispiel 2: Die Slutzky-Gleichung

Modell-Setup

- Betrachten Sie das **Nutzenmaximierungsproblem eines Konsumenten** mit einer strikt quasikonkaven Nutzenfunktion:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

unter der (bindenden) Nebenbedingung

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \;=\; m$$

- Zudem erfülle die Nutzenfunktion die folgenden Eigenschaften:
  - $u_i > 0 \;\; \forall\, i \in \{1, 2\}$
  - $u_{ii} < 0 \;\; \forall\, i \in \{1, 2\}$
  - $u_{ij} < 0 \;\; \forall\, i, j \in \{1, 2\} \wedge i \neq j$
  - $|p_i p_j (u_{ij} + u_{ji})| < \left| p_i^2 u_{jj} + p_j^2 u_{ii} \right| \;\; \forall\, i, j \in \{1, 2\} \wedge i \neq j$

- Aus der Lagrangefunktion zu diesem Problem erhalten wir folgende **Bedingungen erster Ordnung** für ein Nutzenmaximum

$$
\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) - \lambda p_1 &= 0 \\
u_2(x_1, x_2) - \lambda p_2 &= 0 \\
m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

- Diese drei Gleichungen charakterisieren unsere Lösung und sind somit die **drei Lösungsbedingungen in Nullform.**
- Das Modell hat **drei endogenen Variablen**: (x_1, x_2, λ)
- Zudem hat das Modell **drei exogene Parameter**: (p_1, p_2, m)

Komparative Statik

- **Gefragt ist:** Wie verändert sich die Nachfrage nach Gut 1 (x_1), wenn sich der Preis p_1 verändert? Und wie verändert sich die Nachfrage nach Gut 1, wenn sich das Einkommen m verändert? $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} =?$ und $\frac{\partial x_1^*}{\partial m} =?$
- Berechnen wir zunächst wieder die **Determinante von F:**

$$\begin{aligned}
|F| &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + u_{12}p_2p_1 + p_1u_{21}p_2 - (p_1^2u_{22} + p_2^2u_{11} + 0) > 0
\end{aligned}$$

- **Die Matrix M** nimmt folgende Form an:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ x_1 & x_2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Seien $x_1^* \equiv x_1^*$, $x_2^* \equiv x_2^*$, $x_3^* \equiv \lambda$, sowie $\alpha_1 \equiv p_1$, $\alpha_2 \equiv p_2$ und $\alpha_3 \equiv m$, ergeben sich **folgende** $|\mathbf{F_{ij}}|$**:**

$$|F_{11}| = \begin{vmatrix} \lambda & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ x_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad |F_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

- **Einsetzen in Theorem 3.2** ergibt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ x_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{|F|} \\
&= \frac{0 - u_{12} p_2 x_1 + 0 - (-x_1 u_{22} p_1 + p_2^2 \lambda + 0)}{|F|} \\
&= \frac{-\lambda (p_2)^2 + x_1(-p_2 u_{12} + p_1 u_{22})}{|F|} \\
&= \frac{-\lambda p_2^2}{|F|} - \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{|F|} x_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^*}{\partial m} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{|F|} \\
&= \frac{0 + u_{12}p_2 + 0 - (u_{22}p_1 + 0 + 0)}{|F|} \\
&= \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{|F|}
\end{aligned}
$$

- **Beide Vorzeichen sind unbestimmt,** solange wir nicht mehr über die Nutzenfunktion wissen.
- Das ist auch ganz natürlich, denn
  - die Nachfrage nach einem Gut kann bei steigendem Preis fallen (gewöhnliches Gut) oder steigen (Giffen Gut).
  - die Nachfrage nach einem Gut kann bei steigendem Einkommen steigen (normales Gut) oder fallen (inferiores Gut).
- Durch Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung erhalten wir die **Slutzky-Gleichung:**

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{\lambda p_2^2}{|F|} - \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1$$

- Der Term auf der linken Seite ist der **Gesamteffekt** der Eigenpreiserhöhung.
  - Wenn er negativ ist, handelt es sich um ein **gewöhnliches Gut.**
  - Wenn er positiv ist, handelt es sich um ein **Giffen-Gut.**

- Der erste Term auf der rechten Seite ist der **Substitutionseffekt.**
  - Er ist **immer negativ,** d.h., eine Preiserhöhung führt durch den Substitutionseffekt tendenziell zu einer Nachfragesenkung.
- Der zweite Term ist der **Einkommenseffekt.**
  - Wenn es sich um ein **normales Gut** handelt, d.h. wenn $\partial x_1^* / \partial m > 0$, dann ist der Einkommenseffekt ebenfalls negativ, d.h. eine Preiserhöhung führt zu einer Einkommenssenkung, die die Nachfragesenkung verstärkt. Ein normales Gut ist also immer auch ein **gewöhnliches Gut**.
  - Wenn es sich dagegen um ein **inferiores Gut** handelt, d.h. wenn $\partial x_1^* / \partial m < 0$, dann ist der Einkommenseffekt positiv, d.h. eine Preiserhöhung führt zu einer Einkommenssenkung, die tendenziell zu einer Nachfrageerhöhung führt. In diesem Fall sind die beiden Effekte einander entgegengesetzt.
  - Wenn der Einkommenseffekt den Substitutionseffekt betragsmäßig übertrifft, ist der Gesamteffekt positiv, d.h. eine Preiserhöhung führt zu einem Nachfrageanstieg **(Giffen-Gut).**

3.3 Das Envelope-Theorem

Das Envelope-Theorem (ET) kommt zum Einsatz, wenn man wissen möchte welchen Einfluss die Veränderung eines exogenen Parameters auf den **Wert der Zielfunktion im Optimum** hat.

Beispiele:

- Wie verändert sich der Nutzen eines Konsumenten, wenn sich der Preis p_i oder das Einkommen m verändern?
- Wie verändert sich der Gewinn eines Unternehmens, wenn sich der Zinssatz verändert?
- Wie verändern sich die Kosten eines Unternehmens, wenn sich ein Inputpreis verändert?
- Wie verändern sich die Steuereinnahmen des Staates, wenn sich der Steuersatz verändert?

Bemerkungen

1. Das ET ist deutlich **weniger allgemein anwendbar** als das IFT.
   - Das IFT lässt sich auf viele verschiedene Arten ökonomischer Probleme anwenden (Optimierung, Gleichgewicht, etc.)
   - Das ET hingegen ist **nur bei Optimierungsproblemen anwendbar.** (Warum?)
2. Falls das ET anwendbar ist (die 2 Bedingungen hierfür lernen wir in diesem Unterkapitel kennen) stellt es eine **extreme Arbeitserleichterung** dar, da sich das an sich sehr komplexe Problem stark vereinfacht.

3.3.1 Das Envelope-Theorem bei Optimierung ohne NB

Betrachten Sie das folgende **Maximierungsproblem:**

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} z(x_1,\ldots,x_n,\alpha)$$

Die **endogenen Variablen** seien erneut mit x_i $(i = 1,\ldots,n)$ bezeichnet. Der **exogene Parameter** lautet α.

- Hinweis: Das ET ist auch für Modelle mit beliebig vielen exogenen Parametern $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ geeignet.
- Der Einfachheit halber, nehmen wir jedoch nur einen exogenen Parameter – nämlich denjenigen, der sich verändert – mit in die Notation auf (oBdA).

Die Wertfunktion

- Sei $(x_1^*(\alpha), \ldots, x_n^*(\alpha))$ eine Lösung dieses Maximierungsproblems.
- Dann definieren wir

$$v(\alpha) = z(x_1^*(\alpha), \ldots, x_n^*(\alpha), \alpha)$$

als den **Wert der Zielfunktion im Optimum** oder die **Wertfunktion** dieses Problems.

Envelope-Theorem bei Optimierung ohne NB

- Um zu bestimmen, wie sich die Wertfunktion v verändert, wenn sich der exogene Parameter α verändert, kann man folgendes Theorem benutzen:

Theorem (3.3 – ET ohne NB)

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial z(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha}$$

- Das Envelope-Theorem gilt jedoch nur dann, wenn
  1. es sich um eine **marginale Veränderung von** α handelt,
  2. die **Ausgangssituation** vor der Veränderung **ein Optimum** war.

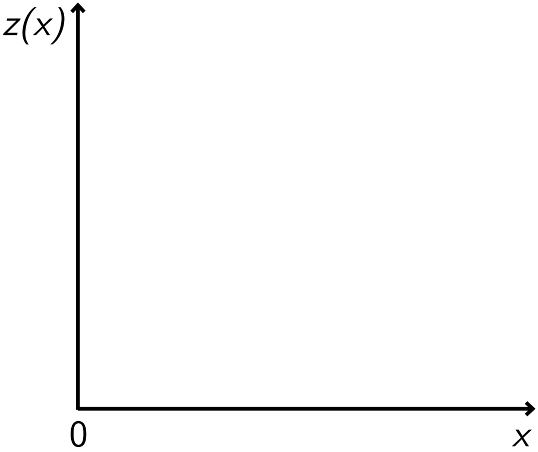
Interpretation

- Das ET sagt also aus, dass wenn man wissen möchte wie sich die Wertfunktion verändert, wenn sich α verändert, man **lediglich die Zielfunktion (direkt) nach α ableiten** muss.
- Das ist **überraschend**! Wenn sich α ändert, hat das eigentlich zwei Effekte auf die Wertfunktion $v(\alpha) = z(x_1^*(\alpha), \ldots, x_n^*(\alpha), \alpha)$.
  1. Einen **direkten Effekt,** da die Zielfunktion direkt von α abhängen kann. Das beeinflusst die Wertfunktion durch $\frac{\partial z(\mathbf{x},\alpha)}{\partial \alpha}$.
  2. Einen **indirekten Effekt,** da α die optimalen endogenen Variablen x_i^* verändern kann, was sich wiederum auf die Zielfunktion auswirkt. Das beeinflusst die Wertfunktion durch $\frac{\partial z(\mathbf{x},\alpha)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$.
- Das Envelope-Theorem sagt jedoch, dass man den **indirekten Effekt ignorieren** kann (vorausgesetzt, die Veränderung von α ist marginal und dass man sich in der Ausgangssituation an einem optimalen Wert von x_i befindet).

- **Warum** kann man den indirekten Effekt ignorieren?
  - Wenn $x_i^*(\alpha)$ in der Ausgangssituation optimal gewählt wurde, dann verläuft die Zielfunktion an dieser Stelle (fast) vollständig flach.
  - Verändert sich α in diesem Punkt nur marginal, hat eine Veränderung von x_i^* (fast) keinen Effekt auf den Wert der Zielfunktion.
  - Machen Sie sich das anhand der Graphik auf der nächsten Seite klar.

- Ist einer der beiden Bedingungen für die Anwendbarkeit des ET nicht erfüllt ist, fallen die indirekten Effekte jedoch ins Gewicht und müssen berücksichtigt werden. Beispiele:
  - Der Parameter α steigt um 3 Einheiten.
  - Der Parameter α fällt um 1%.
  - Vor der Parameterveränderung hat man sich nicht im Optimum befunden.

Interpretation graphisch



Beweis

- Wenn wir die **Wertfunktion** nach α **differenzieren**, erhalten wir **(Kettenregel beachten):**

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

- Die **BEO für ein Optimum** verlangen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

- Gegeben wir sind im Optimum, können wir also schreiben:

$$\frac{\partial v}{d\alpha} = \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

- q.e.d.

3.3.2 Beispiel: Gewinnmaximierung

Modell-Setup

- Ein Unternehmen produziert Gut y, das es auf einem **Wettbewerbsmarkt** zum Preis p_y veräußern kann.
- Zur Produktion von y werden die beiden Inputfaktoren x_1 und x_2 benötigt. Die entsprechende **Produktionsfunktion** lautet $y = f(x_1, x_2)$ und ist konkav.
- Die **Inputpreise** seien mit p_1 und p_2 respektive bezeichnet.
- Das **Gewinnmaximierungsproblem** lautet also:

$$\max_{x_1, x_2} \Pi(x_1, x_2) = p_y f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$$

- Die **BEO** lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= p_y \tfrac{\partial f}{\partial x_1} - p_1 &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= p_y \tfrac{\partial f}{\partial x_2} - p_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Durch Lösung dieses Gleichungssytems erhält man die **optimalen Faktornachfragen:**

$$x_1^*(p_1, p_2, p_y), \qquad x_2^*(p_1, p_2, p_y)$$

- Das bedeutet, dass die jeweilige Faktornachfrage prinzipiell von allen drei exogenen Modellparametern abhängen kann:
  - Dem Eigenpreis (Das ist nicht überraschend. Vorzeichen?)
  - Dem Kreuzpreis des anderen Inputfaktors (Komplemente oder Substitute?)
  - Dem Marktpreis für den Output, p_y (Vorzeichen?)

Komparative Statik

- Die Wertfunktion dieses Problems lautet:

$$\Pi^* = p_y f(x_1^*(p_1, p_2, p_y), x_2^*(p_1, p_2, p_y)) - p_1 x_1^*(p_1, p_2, p_y) - p_2 x_2^*(p_1, p_2, p_y)$$

- Wir wollen nun wissen, wie sich der Unternehmensgewinn verändert, wenn der **Outputpreis $\mathbf{p_y}$ steigt.**
- Prinzipiell müsste man nun sowohl die direkten als auch die indirekten Effekte dieser Preiserhöhung berücksichtigen:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p_y} = f(x_1^*, x_2^*) + p_y \frac{\partial f}{\partial x_1^*} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_y} + p_y \frac{\partial f}{\partial x_2^*} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_y} - p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_y} - p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_y}$$

- Besonders die indirekten Effekte lassen dies zu einer **sehr aufwendigen Angelegenheit** werden.

- Wenn hingegen die Veränderung von p_y marginal ist und sich das Unternehmen vor der Preisänderung im Optimum befunden hat, lässt sich das **Envelope-Theorem** anwenden:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p_y} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_y}$$

- Dieser subtile Unterschied zwischen der linken und der rechten Seite dieser Gleichung macht einen großen Unterschied:
    - Wir können jetzt ignorieren, dass x_1^* und x_2^* von p_y abhängen
    - Stattdessen können wir so tun, als handele es sich bei x_1^* und x_2^* um Konstanten, die beim Ableiten einfach herausfallen.
- **Übrig bleibt lediglich der direkte Effekt** der Preiserhöhung:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p_y} = f(x_1^*, x_2^*)$$

3.3.3 Das Envelope-Theorem bei Optimierung mit NB

Da exogene Parameter auch einen Einfluss auf Nebenbedingungen haben können, ist das **ET aus Kapitel 3.3.1 nicht auf restringierte Optimierungsprobleme anwendbar.**

- Beispiel: Nutzenmaximierung:

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2) \quad \text{s.t. } p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

- Will man berechnen, wie sich der Nutzen verändert, wenn das Einkommen, m, marginal steigt, würde das bisherige ET das falsche Ergebnis liefern, da die Zielfunktion hier nicht direkt vom exogenen Parameter abhängt: $\frac{\partial u^*}{\partial m} = \frac{\partial u}{\partial m} = 0$

Aus diesem Grund lernen wir nun ein leicht modifiziertes **ET für Optimierungsprobleme mit NB** kennen, das jedoch (fast) genau so leicht zu handhaben ist, wie das bisherige ET.

Betrachten Sie das folgende **Maximierungsproblem:**

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} z(x_1,\ldots,x_n,\alpha)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1,\ldots,x_n,\alpha) = 0$$

Die **endogenen Variablen** seien mit x_i $(i = 1,\ldots,n)$ und λ bezeichnet. Der **exogene Parameter** lautet α.

- Hinweis: Auch dieses ET ist für Modelle mit beliebig vielen exogenen Parametern $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ geeignet.
- Der Einfachheit halber, nehmen wir jedoch wieder nur einen exogenen Parameter – nämlich denjenigen, der sich verändert – mit in die Notation auf (oBdA).

Lagrangefunktion und Wertfunktion

- Sei $\mathcal{L} = z(x_1, \ldots, x_n, \alpha) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ die zugehörige Lagrangefunktion und sei $(x_1^*(\alpha), \ldots, x_n^*(\alpha), \lambda^*(\alpha))$ eine Lösung dieses Maximierungsproblems.
- Dann definieren wir

$$v(\alpha) = z(x_1^*(\alpha), \ldots, x_n^*(\alpha), \alpha)$$

als den **Wert der Zielfunktion im Optimum** oder die **Wertfunktion** dieses Problems.

Envelope-Theorem bei Optimierung mit NB

- Um zu bestimmen, wie sich die Wertfunktion v verändert, wenn sich der exogene Parameter α verändert, kann man folgendes Theorem benutzen:

Theorem (3.4 – ET mit NB)

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha}$$

- Auch dieses Envelope-Theorem gilt jedoch nur dann, wenn
  1. es sich um eine **marginale Veränderung von** α handelt,
  2. die **Ausgangssituation** vor der Veränderung **ein Optimum** war.

Interpretation

- Das ET sagt also aus, dass wenn man wissen möchte wie sich die Wertfunktion verändert, wenn sich α verändert, man **lediglich die Lagrangefunktion (direkt) nach α ableiten** muss.
- Die Intuition ist ähnlich wie die beim ET ohne NB:
  - Eventuelle **indirekte Effekte** über die Veränderung der optimalen endogenen Variablen **können ignoriert werden.**
  - Ins Gewicht fallen **nur die direkten Effekte,** die jedoch nicht nur über die Zielfunktion sondern **auch über die Nebenbedingung wirken können.**

Beweis

- Wenn wir die **Wertfunktion** nach α **differenzieren, erhalten wir (Kettenregel beachten):**

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

- Die **Lagrange-BEO für ein Optimum** verlangen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0 \\ \vdots \qquad &= \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

- Gegeben wir sind im Optimum, können wir also schreiben:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

- Gleichzeitig **muss die Nebenbedingung** für alle Werte von α **erfüllt sein:**

$$g(x_1^*(\alpha), \ldots x_n^*(\alpha), \alpha) \; = \; 0$$

- Wenn wir **beide Seiten** dieser Gleichung nach α **differenzieren,** erhalten wir **(Kettenregel beachten):**

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \; = \; 0$$

- Einsetzen in die obige Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} \; = \; \frac{\partial z}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha} \; = \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$$

- q.e.d.

3.3.4 Beispiel: Nutzenmaximierung

Modell-Setup

- Ein Konsument maximiert seine **konkave Nutzenfunktion** $u(x_1, x_2)$, indem er ein Konsumbündel (x_1, x_2) wählt.
- Er muss dabei eine monetäre **Budgetrestriktion** der Form $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ beachten.
- Das **Maximierungsproblem in Lagrangeform** lautet also:

$$\max_{x_1, x_2} \mathcal{L}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

- Das Modell hat **3 endogene Variable** (x_1, x_2 und λ), sowie **3 exogene Parameter** (p_1, p_2, und m).

- Die **BEO** lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -p_1 x_1 - p_2 x_2 + m = 0
\end{aligned}$$

- Durch Lösung dieses Gleichungssytems erhält man die **optimalen Konsumnachfragen:**

$$x_1^*(p_1, p_2, m), \qquad x_2^*(p_1, p_2, m)$$

Komparative Statik

- Die Wertfunktion dieses Problems lautet:

$$u^*(p_1, p_2, m) = u(x_1^*(p_1, p_2, m), x_2^*(p_1, p_2, m))$$

- Wir wollen nun wissen, wie sich der Nutzen verändert, wenn das **Einkommen m steigt.**
- Prinzipiell müsste man nun sowohl die direkten als auch die indirekten Effekte dieser Einkommenserhöhung berücksichtigen.
- Besonders die indirekten Effekte lassen dies erneut zu einer **sehr aufwendigen Angelegenheit** werden.

- Wenn hingegen die Veränderung von m marginal ist und sich der Konsument vor der Einkommensänderung im Optimum befunden hat, lässt sich das **Envelope-Theorem** anwenden:

$$\frac{\partial u^*}{\partial m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \lambda$$

- Überrascht Sie dieses Ergebnis?